Das Zweikörperproblem der GRT

J. Brandes
03.05.16 last update: 03.05.16

Vorbemerkung.

Die klassische GRT ist experimentell gut bestätigt. Zuletzt durch den Nachweis von Gravitationswellen. Die LI der GRT macht aber (auch für Gravitationswellen) dieselben experimentellen Voraussagen, so dass experimentell bis heute nicht zwischen beiden Interpretationen unterschieden werden kann. Dies wird bestätigt von dem berühmten Gravitationsphysiker Thorne in [1] und steht im Widerspruch zu der Euphorie von zahllosen Physikern, mit der die klassische GRT als allein wahr hingestellt wird.
Im Folgenden soll gezeigt werden, dass die LI der GRT das Zweikörperproblem vielleicht lösbar macht. In der klassischen GRT gilt es als nicht lösbar, s. Wikipedia, Zweikörperproblem: „Da die Anwesenheit der beiden Massen die Raum-Zeit-Struktur selbst verändert, sind Konzepte wie *Massenschwerpunkt*, *Gesamtenergie*, *Drehimpuls* nicht länger anwendbar.[A 4] Daher ist keine Reduktion des Problems auf ein Ein-Zentren-Problem möglich." Für die LI gilt das nicht, die folgenden Überlegungen sind aber nur eine Anregung, wie das Zweikörperproblem lösbar sein könnte. Die eigentliche Lösung erfordert weitere Überlegungen, insbesondere Diskussionen mit Fachleuten, für die dem Autor wegen der Vorurteile gegen die LI die Gelegenheit fehlt.

Der neue Ansatz

In der klassischen GRT verändert die Anwesenheit von Massen die Raum-Zeit-Struktur und es gibt nicht länger irgendwelche Inertialsysteme, in denen sich Massen mit Gravitationsfeldern befinden. Für die LI sind die gekrümmten Raumzeiten ein Hilfsmittel, die Eigenschaften von Gravitationsfeldern zu *beschreiben*, deshalb bleibt es bei Inertialsystemen in denen sich Gravitationsfelder befinden. Die Lösung des Ein-Zentren-Problems der klassischen GRT mit Hilfe der Schwarzschildmetrik beweist natürlich, dass die newtonsche Gravitationstheorie nur eine Näherung ist, aber für die LI der GRT bleibt es bei Gravitationsfeldern und Zentralkräften, auch wenn das newtonsche Gravitationsgesetz nur noch näherungsweise gültig sein kann. Der geänderte Ansatz der klassischen GRT liefert beim Ein-Zentren-Problem für die inneren Bahnen statt Ellipsen Rosettenbahnen und für die LI folgt dasselbe, obwohl die gekrümmte Raumzeit hier nur ein mathematisches Hilfsmittel ist, Gravitationsfelder zu beschreiben. Real bleibt es Feldern und Zentralkräften. So gibt es ein Gravitationsgesetz, das sich aber vom newtonschen Gravitationsgesetz unterscheidet. Es lautet:

(1) $$F(r) = \frac{G m_{grav} M_{grav}}{r^2}\left(1 - \frac{2GM_{grav}}{c^2 r}\right)^{-1/2}$$

s. mein Buch, Formel (24.10)
Da für die LI wie bei Newton die Gravitationskräfte Zentralkräfte sind, wenn auch komplizierter als das newtonsche Gravitationsgesetz sie beschreibt, erlaubt das ein anderes Vorgehen, das Zweikörperproblem zu lösen, das sich an die klassische Mechanik anlehnt.
Zur Erinnerung: Die Lösung des Zweikörperproblems der klass. Mechanik ergibt sich in zwei Schritten.

1.) Man löst das Ein-Zentren-Problem für eine Masse

(2) $$\mu = \frac{m\,M}{m+M}$$

unter Anwendung des newtonschen Gravitationsgesetzes und erhält damit die Bewegungsgleichung $\vec{r}_{mM}(t)$ im Schwerpunktsystem von m und M. (s. Rebhan, Mechanik, (4.86)-(4.89))
m und M sind die gravitativen Massen der sich umkreisenden Körper (Planet und Sonne).

2.) Die Bewegungsgleichungen im Schwerpunktsystem $\vec{r}_m(t)$ und $\vec{r}_M(t)$ für die Körper m und M ergeben sich recht einfach aus der Bewegungsgleichung $\vec{r}_{mM}(t)$:

(3) $$\vec{r}_m(t) = \frac{\mu}{m}\vec{r}_{mM}(t)$$
(4) $$\vec{r}_M(t) = \frac{\mu}{M}\vec{r}_{mM}(t)$$

Voraussetzungen sind

a.) m und M bleiben konstant. (Tatsächlich ändern sie sich gemäß der SRT, weil sich ihre Geschwindigkeiten bei der Bewegung im Gravitationsfeld nicht konstant bleiben.)
b.) Es gelten der Schwerpunkt-, Impuls-, Drehimpuls- und Energieerhaltungssatz.

Diese Voraussetzungen sind für die klass. GRT nicht erfüllt, sobald mehrere Körper gravitativ wechselwirken und deshalb ist für die klass. GRT das Zweikörperproblem nicht lösbar, siehe obiges Zitat aus Wikipedia. Als weiteren Grund verweist Wikipedia auf die Entstehung von Gravitationswellen. Das gilt aber bereits für das Ein-Zentren-Problem und wird auch für die LI vernachlässigt.
Für die LI der GRT gelten die Bedingungen a.) und b.) und deshalb kann das Zweikörperproblem analog gelöst werden.

Für die LI der GRT gelten die Bedingungen b.), denn die gekrümmte Raumzeit ist für sie nichts Reales, sondern nur ein Beschreibungsmittel für Eigenschaften von Gravitationsfeldern oder anders ausgedrückt nur ein mathematisches Hilfsmittel. Ganz analog ist die sphärische Geometrie der Kugelschale kein selbständiger zweidimensionaler Raum sondern eine Punktmenge im realen dreidimensionalen Raum mit bestimmten Eigenschaften. Die gekrümmte Raumzeit ist als riemannscher Raum nichts weiter als ein mathematisches Hilfsmittel, um Eigenschaften von Gravitationsfeldern zu beschreiben. Einzelheiten s. mein Buch [2] und meine Website www.grt-li.de .

Bedingung a.) ist komplizierter. Für das Ein-Zentren-Problem ($m \ll M$) gilt a.) auch für die klass. GRT, weil auch für die klass. GRT die Gesamtenergie E_G beim freien Fall erhalten bleibt. In Formeln:

(5) $$E_G = mc^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{v=0}}\right)^{1/2}$$

m = Ruhemasse im Unendlichen von Körper m.

$r_{v=0}$ ist der Ort, an dem der freie Fall des Teilchens mit der Geschwindigkeit $v = 0$ beginnt.

Einzelheiten s. mein Buch, Formel (22.6) und Rebhan, Relativitätstheorie, Bewegungsintegrale (11.28). Konkret heißt das, obwohl v sich beim freien Fall ändert, bleibt die Gesamtenergie und damit die Masse konstant, weil sich auch die Ruhemasse im Feld ändert. Es gilt:

(6) $$E_G = m_{grav} c^2 = \text{konst.}$$

Die gravitative Masse bleibt also beim Ein-Zentren-Problem auch für die klass. GRT nachweisbar konstant.

Nun wechseln wir zum Zweikörperproblem.

m ist die Ruhemasse von Körper m (Planet) außerhalb des Gravitationsfeldes von M

M ist die Ruhemasse von Körper M (Sonne) außerhalb des Gravitationsfeldes von m.

Ruht m im Gravitationsfeld von M am Ort r, nimmt die Ruhemasse von m ab. Quantitativ gilt solange $m \ll M$:

(7) $$E_G = m_{grav} c^2$$

(8) $$m_{grav} = m\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{v=0}}\right)^{1/2}$$

$r_{v=0}$ ist der Ort im Gravitationsfeld vom M, in dem m ruht.

m_{grav} ist die Masse, die das Gravitationsfeld des Körpers m (Planeten) erzeugt.

Da $m \ll M$ ist $M_{grav} = M$. M ist der Wert der gravitierenden Masse des Zentralfeldes, der in der Schwarzschildmetrik normalerweise mit m bezeichnet wird.

Diese Gleichungen folgen aus der klass. GRT, solange die Schwarzschildmetrik anwendbar ist, s. mein Buch + Fachbücher.

Wie lauten diese Formeln für $m \approx M$ und $v = 0$, d. h. wenn beide Massen relativ zueinander ruhen, aber vergleichbare Massen haben? Meine Annahme lautet:

(9) $$m_{grav} = m\left(1 - \frac{2GM_{grav}}{c^2 r_{v=0}}\right)^{1/2}$$

(10) $$M_{grav} = m\left(1 - \frac{2Gm_{grav}}{c^2 r_{v=0}}\right)^{1/2}$$

Wie lauten diese beiden Formeln, falls sich beide Körper im Gravitationsfeld umeinander bewegen, d.h. $v \neq 0$? Die Formeln ändern sich nicht, denn meine Annahme lautet, dass die Gesamtenergie jeden einzelnen Körpers konstant bleibt, solange außer Gravitationskräften keine äußeren Kräfte auftreten. In der Sprache der GRT, die Körper müssen sich auf Geodäten bewegen. Für innere Bahnen kann man das mit denselben Formeln beschreiben wie für ruhende Körper mit dem Unterschied, dass $r_{v=0}$ fiktive Werte sind. Obwohl sich die kinetische Energie der Körper m , M im Gravitationsfeld ändert, ist die Gesamtenergie konstant, weil sich deren Ruhemasse entsprechend ändert. Ohne die klass. GRT (Formel (8)) wäre diese Annahme nicht quantitativ formulierbar, woran man sieht, dass die LI keine Fundamentalkritik der GRT ist und dieselben Formeln verwendet.

Damit ist auch Bedingung a.) bewiesen. Anschaulich zusammengefasst:

In der newtonschen Gravitationstheorie ändert sich die Masse eines Körpers im Gravitationsfeld nicht, in der klass. GRT ändert sie sich, wenn sich die Geschwindigkeit v ändert. In der LI bleibt die Gesamtenergie bei freier Bewegung im Gravitationsfeld konstant und damit auch die zugehörige Masse. Sie ist aber für innere Bahnen kleiner als die Ruhemasse außerhalb des Feldes. Für das Ein-Zentren-Problem (Schwarzschildmetrik) ist das beweisbar, für das Zweikörperproblem eine Annahme, die falsch sein kann. Sollte sie falsch sein, dürfte sie dennoch für eine Reihe von Anwendungen eine gute Näherung sein.

Die Bahngleichungen

Die Bahngleichungen der Körper m und M, $\vec{r}_m(t)$ und $\vec{r}_M(t)$, werden mit 1.) und 2.) in Schritt 3.) bestimmt. Das Vorgehen ist analog zur Lösung des Zweikörperproblems der klassischen Mechanik.

Es ist – wenigstens näherungsweise – gezeigt:

1.) m_{grav} und M_{grav} sind im Zweikörperproblem konstant.
2.) m und M bewegen sich in einem Zentralfeld

(11) $$F(r) = m_{grav}M_{grav}\,f(r)$$

mit (12) $$f(r) \approx G\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2GM_{grav}}{c^2r}\right)^{-1}\left(1-\frac{2Gm_{grav}}{c^2r}\right)^{-1}$$

Die genaue Form von $f(r)$ muss man nicht kennen, denn die Bahngleichung $\vec{r}(t) = \vec{r}_{mM}(t)$ wird mit Hilfe der klass. GRT bestimmt und von dort übernommen. Man muss nur berücksichtigen, dass es ein von *r* abhängiges Zentralfeld $F(r)$ und damit ein Potential $V(r)$gibt.

3.) Dieses Potential hat -wie in der newtonschen Gravitationstheorie und klassischen Mechanik - folgende Eigenschaften:

(13) $$m\ddot{\vec{r}}_m = \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_m}$$ und

(14) $$M\ddot{\vec{r}}_M = \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_M}$$

(15) $$\mu\ddot{\vec{r}}_{mM} = \frac{\partial V(|\vec{r}_{mM}(t)|)}{\partial \vec{r}_{mM}}$$ mit

(16) $$\mu = \frac{m_{grav}M_{grav}}{m_{grav}+M_{grav}}$$

(17) $$\vec{r}_m(t) = \frac{\mu}{m_{grav}}\vec{r}_{mM}(t)$$

(18) $$\vec{r}_M(t) = \frac{\mu}{M_{grav}}\vec{r}_{mM}(t)$$

„Aufgrund der Linearität dieser Zusammenhänge sind die realen Bahnen [hier $\vec{r}_m(t)$, $\vec{r}_M(t)$] der fiktiven Bahn [hier $\vec{r}_{mM}(t)$] ähnlich“ Rebhan, Mechanik, Formel (4.90). In der newtonschen Theorie ist $\vec{r}_{mM}(t)$ eine Ellipse, in der klass. GRT eine Rosettenbahn, was die LI von der klass. GRT übernimmt. Mit Gleichung (17), (18) sind $\vec{r}_m(t)$, $\vec{r}_M(t)$ bestimmt, beide Körper bewegen sich für die LI der GRT auf Rosettenbahnen um den gemeinsamen Schwerpunkt.

Wie oben aus Wikipedia zitiert, kennt die klass. GRT keinen Energie- und Impulserhaltungssatz beim Zweikörperproblem. Damit ist sie für mich keine falsche aber eine unvollständige Theorie. Andererseits, die Energieerhaltung in der Schwarzschildmetrik, Formel (5), ist eine bemerkenswerte wissenschaftliche Leistung.

Literatur

[1] Thorne, Kip, *Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy*, New York 1994, Reprint 1995, page 397, 400. Deutsche Ausgabe: *Gekrümmter Raum und verbogene Zeit. Einsteins Vermächtnis.* München 4. Auflage 1994, Seiten 457, 460.

[2] J. Brandes, J. Czerniawski: *Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie für Physiker und Philosophen - Einstein- und Lorentz-Interpretation, Paradoxien, Raum und Zeit, Experimente,* 2010 Karlsbad: VRI, 4. erweiterte Auflage, 404 Seiten, 100 Abbildungen, ISBN 978-3-930879-08-3 Näheres: www.buchhandel.de/ oder www.amazon.de/

[3] E. Rebhan, *Theoretische Physik: Mechanik*, Spektrum Akademischer Verlag, 2006, Kap. 4.2

[4] E. Rebhan, *Theoretische Physik: Relativitätstheorie und Kosmologie*, Spektrum Akademischer Verlag, 2012, Kap. 11.2, Formel (11.28)

Meine Website www.grt-li.de